Maximumprinzip

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, nichtleeres Gebiet.

a) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $g := u|_{\partial\Omega}$ und $-\Delta u(x) + u(x)a(x) = 0$ $(*)$ für $x \in \Omega$ mit einer positiven Funkion a. Zeigen Sie für $x \in \Omega$:

$$(**) \qquad \min\{0, \min g\} \leq u(x) \leq \max\{0, \max g\}$$

b) Machen Sie sich mir Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichung $-u'' + u = 0$ klar, dass man in a) nicht $\min g \leq u(x) \leq \max g$ erwarten darf.

c) Sei u in Ω eine harmonische Funktion, deren Gradient stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar ist. Zeigen Sie, dass mindestens eine Maximalstelle von $|\nabla u|^2$ auf $\partial\Omega$ liegt.